# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS


# OPTIMALIZACE TECHNICKÝCH PROCESŮ
ENGINEERING PROCESS OPTIMIZATION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**
BACHELOR'S THESIS


**AUTOR PRÁCE** AUTHOR — **Jaroslav Pluskal**

**VEDOUCÍ PRÁCE** SUPERVISOR — **RNDr. Pavel Popela, Ph.D.**



**BRNO 2017**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

# Zadání bakalářské práce

| | |
|---|---|
| Ústav: | Ústav matematiky |
| Student: | **Jaroslav Pluskal** |
| Studijní program: | Aplikované vědy v inženýrství |
| Studijní obor: | Matematické inženýrství |
| Vedoucí práce: | **RNDr. Pavel Popela, Ph.D.** |
| Akademický rok: | 2016/17 |

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Optimalizace technických procesů

**Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Student se bude zabývat problematikou optimalizace technických procesů pro vybranou aplikační oblast. Student využije osvojené poznatky matematické analýzy, lineární algebry a diskrétní matematiky a bude je aplikovat na vybraný inženýrský proces transformující vstupy na cílové výstupy při dodržení technických omezení a minimalizaci vybrané účelové funkce. Student navrhne základní model (založený na principech newsvendor modelu) a ten postupně zobecní. Při řešení budou dále využity poznatky z oblasti operačního výzkumu a vhodný matematický software. Vytvořený matematický model bude implementován a řešen pro testovací data.

**Cíle bakalářské práce:**

1. Student si prohloubí znalosti z vybrané oblasti optimalizačních modelů a metod a bude je přehledně prezentovat.
2. Vytvořený matematický model problému transformujícího vstupní hodnoty na výstupní hodnoty vybraného inženýrského procesu bude uveden postupně krok za krokem od nejjednodušší varianty k úplnému modelu.
3. Vlastnosti matematického modelu budou analyzovány a budou využity pro volbu řešícího algoritmu.
4. Softwarová implementace bude realizována v modelovacím jazyce a řešení pro testovací data budou interpretována.

**Seznam literatury:**

WILLIAMS, H. Paul. 2013. Model building in mathematical programming. 5th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons. ISBN 978-1118443330.

NASH, Stephen a Ariela SOFER. 1995. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill. ISBN 978-0070460652.

KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. 2001. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTIUM. ISBN 8021418397.

ANDĚL Jiří. 2007. Statistické metody. Praha: Matfyzpress. ISBN 807-3780038.

RUSZCZYNSKI, Andrzej et al. 2003. Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 10: Stochastic Programming. Amsterdam: Elsevier. ISBN 978-0444508546.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

| prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.<br>ředitel ústavu | doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.<br>děkan fakulty |
|---|---|

**Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá optimalizací s důrazem na model kolportéra novin a jeho využití. Na úvod je uveden přehled základních pojmů a teorie týkající se pravděpodobnosti, matematické analýzy a optimalizace. Cílem práce je naformulovat úlohu kolportéra novin v jeho základní formě a následně demonstrovat vliv různých rozdělení poptávky. Získané poznatky se následně aplikují při řešení projektu továrny, pro který chceme stanovit optimální parametry. Namodelování projektu a následné výpočty jsou realizovány pomocí softwaru GAMS.

**Summary**

This bachelor's thesis deals with optimization with emphasis on Newsvendor model and its usage. An overview of basic terms and theory related to probability, mathematical analysis and optimization is mentioned at the beginning. The main aim of this thesis is to formulate a Newsvendor problem in its basic form and then demonstrate the impact of various demand distributions. After that the gained knowledge is used to solve a project of factory, for which we want to set optimal parameters. Software GAMS is used to model and solve the project.

**Klíčová slova**

Optimalizace, stochastické programování, úloha kolportéra novin, továrna, GAMS

**Keywords**

Optimization, stochastic programming, newsvendor model, factory, GAMS

PLUSKAL, Jaroslav. *Optimalizace technických procesů.* Brno, 2017. 32 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 2017. Vedoucí práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

# PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a s využitím zdrojů, jejichž výčet uvádím v přiloženém seznamu literatury.

Brno, 26. května 2017 Jaroslav Pluskal

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval panu RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, konzultace a podnětné návrhy k práci. Dále bych své díky věnoval přátelům a zejména rodině za podporu během studia.

Brno, 26. května 2017 Jaroslav Pluskal

# Obsah

# Úvod

Motivací k vybrání a sepsání této bakalářské práce s touto tématikou je skutečnost, že s optimalizací jako takovou se setkáváme v každodenním životě, aniž bychom si to uvědomovali. Ve své podstatě se jedná o řešení problému, kdy za předem určených podmínek se snažíme dostat ideální řešení. V každodenním životě se jedná pouze o triviální problémy, jako například nejlevnější nákup pro domácnost na co nejdelší dobu, aniž by se produkty musely zlikvidovat nevyužité. Dalším příkladem může být nalezení nejkratší cesty skrz městskou síť ulic. Takovéto problémy řešíme převážně díky zdravému rozumu a zkušenostem bez potřeby cokoliv matematicky řešit a případný špatný odhad nemá fatální následky. Na druhou stranu pro velké firmy a společnosti je v mnoha případech optimalizace to jediné, co je schopno zajistit zisk a s tím spojenou budoucí existenci na trhu. Často se jedná o složité komplexní problémy, zahrnující náhodné či neznámé faktory, které je potřeba zohlednit.

Na úvod je uveden přehled základních pojmů a teorie týkající se pravděpodobnosti, matematické analýzy a optimalizace, o které se opíráme v rámci celé práce. Druhá kapitola je věnována hlavní části bakalářské práce, úloze kolportéra novin. Ve své základní podstatě se jedná o problém pouličního prodejce novin, který se každé ráno rozhoduje, kolik má nakoupit výtisků, aby měl co největší zisk, přičemž poptávku může odhadnout, ale ne přesně určit s jistotou. Po formulaci a odvození základních obecných vztahů je uveden význam jednotlivých rozdělení a jejich vliv na konečné výsledky. Získané poznatky jsou poté aplikovány ve třetí kapitole na úlohu, kde je snahou zjistit optimální výši investice pro novou továrnu. Popsaná situace je namodelována a následné výpočty jsou realizovány pomocí softwaru GAMS.

# 1. Základní pojmy

V následující kapitole uvedeme důležité pojmy, definice a věty, které později využijeme v navazujících kapitolách. Poznatky jsou převzaty především z [1], [9], [11] a [13].

## 1.1. Pravděpodobnost

Nejdříve je třeba uvést definici pravděpodobnostního prostoru, na kterém budeme definovat další pojmy a operace.

**Definice 1.1.1** *Pravděpodobnostním prostorem rozumíme uspořádanou trojici* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *kde* $\Omega$ *je prostor elementárních jevů* $\omega$, $\mathcal{A}$ *je jevové pole* [1], *jehož prvky jsou náhodné jevy, tj. podmnožiny* $\Omega$, *které tvoří tzv.* $\sigma$*-algebru, a* $P$ *rozumíme pravděpodobnost náhodného jevu splňující*

- $P(A) \geq 0$, *kde* $A \in \mathcal{A}$ *je náhodný jev,*
- $P(\Omega) = 1$,
- *pro navzájem neslučitelné jevy* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *tvořící spočetnou množinu, kdy* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$; $i, j = 1, ..., n, ...$ *pak* $P(A_1 \cup ... \cup A_n \cup ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$

S využitím definice pravděpodobnostního prostoru můžeme zavést pojem náhodná veličina, označována také jako náhodná proměnná.

**Definice 1.1.2** *Náhodnou veličinou rozumíme zobrazení* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *které je měřitelné, tj. pro každé* $B \in \mathcal{B}$, *kde* $\mathcal{B}$ *je* $\sigma$*-algebra na* $\mathbb{R}$, *platí* $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in A$, *kde* $A \in \mathcal{A}$.

**Definice 1.1.3** *Distribuční funkcí* $F(x)$ *náhodné veličiny* $X$ *máme na mysli funkci*

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

*která každému reálnému číslu* $x$ *přiřadí pravděpodobnost, že náhodná veličina* $X$ *nabude hodnoty menší nebo rovné číslu* $x$.

**Definice 1.1.4** *Nechť* $p \in (0, 1)$. *Prvek* $x_p$ *se nazývá p-kvantil náhodné veličiny, jestliže*

$$x_p = \min\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\}. \tag{1.2}$$

V neposlední řadě uvedeme funkce, které nám určují rozložení pravděpodobnosti. Musíme ale rozlišit dva případy: diskrétní a spojitou náhodnou veličinu.

**Definice 1.1.5** *Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny* $X$ *je nezáporná funkce*

$$p(x) = \begin{cases} p_i, & \text{pro } x = x_i \text{ , } i = 1, 2, ... \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{1.3}$$

*taková, že platí*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{j} p_i, \;\; j = \max\{k \in \mathbb{N} | x_k \leq x\}. \tag{1.4}$$

**Definice 1.1.6** *Funkce hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny $X$ je nezáporná funkce $f(x)$ taková, že platí*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

V této chvíli uvedeme dvě důležité charakteristiky náhodných veličin. První z nich je střední hodnota, někdy označována jako charakteristika polohy.

**Definice 1.1.7** *Střední hodnota $E(X)$ diskrétní náhodné veličiny $X$ je zadána vztahem*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{j} x_i p_i, \ j \in \mathbb{N}, \ \textit{kde } P[X = x_i] = p_i. \tag{1.6}$$

**Definice 1.1.8** *Střední hodnota $E(X)$ spojité náhodné veličiny $X$ je zadána vztahem*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{1.7}$$

*za předpokladu, že integrál konverguje absolutně.*

Druhou charakteristikou je rozptyl neboli variabilita.

**Definice 1.1.9** *Rozptyl $D(X)$ diskrétní náhodné veličiny $X$ je dán vztahem*

$$D(X) = \sum_{i=1}^{j} [x_i - E(X)]^2 p_i, \ j \in \mathbb{N}, \ \textit{kde } P[X = x_i] = p_i. \tag{1.8}$$

**Definice 1.1.10** *Rozptyl $D(X)$ spojité náhodné veličiny $X$ je dán vztahem*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx, \tag{1.9}$$

*za předpokladu, že střední hodnota $E(X)$ existuje.*

Nyní uvedeme definice dvou základních spojitých náhodných veličin. Jednou z nich je tzv. rovnoměrné rozdělení.

**Definice 1.1.11** *Spojitá náhodná veličina $X$ má rovnoměrné náhodné rozdělení $U(a, b)$ na intervalu $(a, b)$ právě tehdy, když funkce hustoty je tvaru*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \textit{pro } x \in [a, b], \\ 0, & \textit{jinak,} \end{cases} \tag{1.10}$$

*a distribuční funkce*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{pro } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \textit{pro } x \in [a, b], \\ 1, & \textit{pro } x > b. \end{cases} \tag{1.11}$$

V aplikacích často využívaným rozdělením je tzv. normální rozdělení.

**Definice 1.1.12** *Spojitá náhodná veličina* $X$ *má normální náhodné rozdělení* $N(\mu, \sigma^2)$ *se střední hodnotou* $\mu$ *a rozptylem* $\sigma^2$ *právě tehdy, když funkce hustoty má tvar*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

*a distribuční funkce*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

## 1.2. Matematická analýza

Nyní uvedeme základní poznatky z oblasti matematické analýzy. Nejprve zavedeme následující:

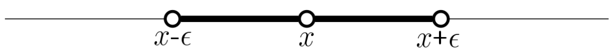
**Definice 1.2.1** *Okolím bodu* $x \in \mathbb{R}$ *rozumíme libovolný otevřený interval obsahující bod* $x$*, značíme* $O(x)$.


Obrázek 1.1: okolí bodu $x$

**Definice 1.2.2** $\epsilon$*-okolím bodu* $x \in \mathbb{R}$ *rozumíme interval* $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ *pro* $\epsilon > 0$*, značíme* $O_\epsilon(x)$.


Obrázek 1.2: $\epsilon$-okolí bodu $x$

**Definice 1.2.3** *Ryzí* $\epsilon$*-okolí bodu* $x \in \mathbb{R}$ *definujeme jako* $\overline{O}_\epsilon(x) = O_\epsilon(x) - \{x\}$.



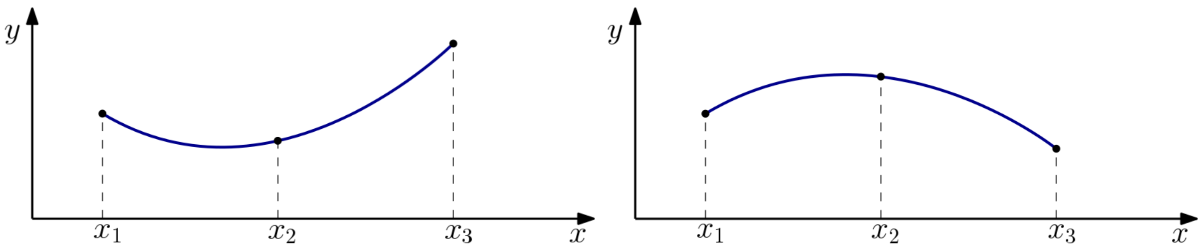

Obrázek 1.3: Ryzí $\epsilon$-okolí bodu $x$

Následující definice se týkají průběhu a tvaru funkce.

**Definice 1.2.4** *Řekneme, že funkce* $f(x)$ *je třídy* $C_n(M)$*, kde* $n \in \mathbb{N}$*, jestliže má na množině* $M$ *spojitou* $n$*-tou derivaci. Má-li funkce* $f(x)$ *na množině* $M$ *spojité všechny derivace říkáme, že funkce* $f(x)$ *je třídy* $C_\infty(M)$.

**Definice 1.2.5** *Řekneme, že funkce* $f(x)$ *je konvexní, respektive konkávní, na intervalu* $I$*, jestliže pro* $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ *taková, že* $x_1 < x_2 < x_3$ *platí:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \textit{ respektive } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$



Obrázek 1.4: Příklad konvexní funkce (vlevo) a konkávní funkce (vpravo)

Z obrázku (1.4) je patrné, že tato vlastnost bude jedním z hlavních kriterií při určování maxima či minima funkce, souhrnně označovaného jako lokální extrém, jehož definice zní takto:

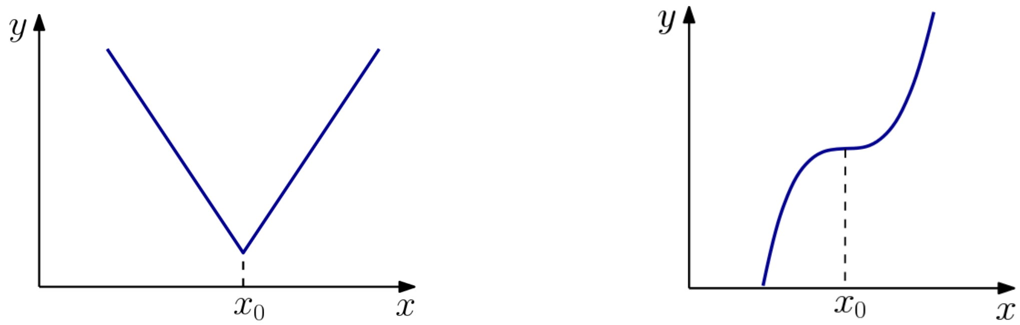
**Definice 1.2.6** *Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ lokální minimum, respektive maximum, jestliže existuje $\epsilon > 0$ tak, že $\forall x \in \overline{O}_\epsilon(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$, respektive $f(x_0) \geq f(x)$.*

V případě ostrých nerovností hovoříme o tzv. ostrých lokálních extrémech.

Následuje obecný praktický návod, jak najít lokální extrém. Nejdříve uvedeme nutnou podmínku existence lokálního extrému.

**Věta 1.2.7** *Nechť nastává v bodě $x_0$ lokální extrém a zároveň je v tomto bodě definována derivace, pak musí platit $f'(x_0) = 0$.*

Na obrázku (1.5a) je ilustrován příklad typického hrotu, který nemá definovanou derivaci v bodě $x_0$, ale i přesto má v tomto bodě lokální extrém.



(a) Hrot

(b) Nutná podmínka

Obrázek 1.5: Příklad hrotu a nedostatečnosti nutné podmínky

Podotkněme, že platí pouze jednostranná implikace, tj. existence lokálního extrému $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$, opačný vztah neplatí, což je patrné z obrázku (1.5b). Proto potřebujeme lepší předpoklad.

**Věta 1.2.8** *Nechť nastává v bodě $x_0$ lokální extrém a zároveň je $f(x)$ funkce třídy $C_\infty(O(x_0))$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že musí platit $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$.*

V případě, že $f^{(2n)}(x_0) > 0$, je funkce na okolí bodu $x_0$ konvexní a nastává zde lokální minimum. Naopak, pokud $f^{(2n)}(x_0) < 0$, je funkce na okolí bodu $x_0$ konkávní a nastává zde lokální maximum.

Zatím jsme se omezili pouze na extrém lokální, ovšem v některých aplikacích je třeba nalézt globální extrém.

**Definice 1.2.9** *Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ globální minimum, respektive maximum, jestliže $\forall x \in Dom f$ platí $f(x_0) \leq f(x)$, respektive $f(x_0) \geq f(x)$.*

Hledání takového extrému spočívá v nalezení a porovnání funkčních hodnot všech lokálních extrémů. Existence globálního extrému může být interpretována pomocí Weierstrassovy věty.

**Věta 1.2.10** *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na kompaktním (tj. omezeném a uzavřeném) intervalu $I$. Pak funkce $f(x)$ je na intervalu $I$ omezená a nabývá na něm svého minima i maxima, tj. v intervalu $I$ existují body $x_m$ a $x_M$ takové, že $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in I$.*

## 1.3. Optimalizace

Podstata optimalizačních úloh spočívá ve výběru nejlepšího řešení z dané množiny všech přípustných řešení, která bývá obvykle vymezena omezujícími podmínkami vyjádřenými pomocí rovnic či nerovnic. Které řešení z dané přípustné množiny je lepší či horší nám určuje tzv. účelová funkce (v literatuře někdy označována jako kriteriální nebo cílová) a řešení problému často spočívá v nalezení extrému této funkce.

Při optimalizaci je tedy snahou namodelovat daný projekt a sestavit tak model obsahující zmíněnou účelovou funkci a vymezit množinu přípustných řešení. V samotném modelu pak figurují různé objekty, které lze rozdělit do dvou kategorií: proměnné a parametry.

Proměnnou optimalizační úlohy máme na mysli objekt, který lze libovolně měnit v rámci přípustné množiny řešení. Jedná se o výstupy celého procesu, které se snažíme získat. Naopak, parametrem optimalizační úlohy máme na mysli objekt, který nelze měnit a nebo ho lze v rámci úlohy měnit pouze nepřímo, tzn. jen pomocí vztahů mezi proměnnými. Jedná se o vstupní či sledované objekty procesu.

Za výsledek pak podle formulace zadání považujeme takové hodnoty proměnných z množiny přípustných řešení, které mají mezi všemi přípustnými řešeními buď největší nebo nejmenší hodnotu účelové funkce.

**Definice 1.3.1** *Nechť množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je množina všech přípustných řešení a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je účelová funkce, pak globální optimalizací rozumíme nalézt takové $x_0 \in M$, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in M$. Nalezené $x_0$ označujeme jako optimální řešení.*

Definice globální optimalizace je uvedena pro případ minimalizace bez újmy na obecnosti. V případě maximalizace lze totiž úlohu převést na minimalizaci funkce $g(x) = -f(x)$. S ohledem na tuto skutečnost budeme v této kapitole využívat výhradně zápisu a definic pro minimalizaci, tzn. budeme hledat minimum.

V literatuře bývá zmíněná úloha zapisována následovně:

$$\min_x f(x) \tag{1.14}$$

$$g_i(x) \geq b_i\,,\ i = 1, 2, ..., \tag{1.15}$$

kde $f(x)$ je minimalizovaná účelová funkce a $g_i(x)$ jsou nerovnostní omezující funkce a konstanty $b_i$ jsou hranice omezení.

Úloha je naformulována tak, že výsledkem je globální extrém. Ve skutečnosti u komplikovaných úloh je někdy považováno za dostačující výsledek tzv. lokální optimalizace, kdy za řešení $x_0$ bereme v úvahu minimum funkce na nějakém okolí $O(x_0)$.

**Definice 1.3.2** *Nechť množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je množina všech přípustných řešení a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je účelová funkce, pak lokální optimalizací rozumíme nalézt takové $x_0 \in M$, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in M \cap O(x_0)$.*

Využitím pouze lokální optimalizace tedy obecně nedostaneme optimální řešení (minimum), ale pouze nějaké výhodnější řešení, než které bylo uvažováno. Zisk optimálního řešení se však nevylučuje. Následují vybrané definice týkají se klasifikace optimalizačních úloh, které mají význam pro tuto bakalářskou práci.

**Definice 1.3.3** *Řekněme, že optimalizační úloha je stochastická právě tehdy, když alespoň jeden parametr je vyjádřen pomocí náhodné veličiny, jejíž rozdělení je známo.*

Stochastická úloha se snaží o zachycení náhodných jevů, jejíchž rozdělení je podle definice známo. Při řešení se často využívá scénářový přístup, při kterém se řeší jednotlivé situace a do celkového výsledku se promítne jen zlomek dílčího výsledku určený pravděpodobností.

**Definice 1.3.4** *Řekněme, že optimalizační úloha je celočíselná právě tehdy, když alespoň jedna proměnná nabývá pouze celočíselných hodnot.*

Celočíselná podmínka úlohu značně zkomplikuje i přesto, že vhodným řešení se zdá být zaokrouhlená hodnota získaného neceločíselného řešení. Faktem ovšem je, že taková úprava řešení nemusí být optimálním řešením v rámci celočíselné úlohy, dokonce může vést na značně chybné či nepřípustné řešení.

# 2. Úloha kolportéra novin

V této kapitole se budeme zabývat důležitým základním matematickým modelem v oblasti technických, zejména výrobních (např. při řízení zásob), procesů s názvem newsvendor problem, v literatuře někdy také označován jako newsboy problem. V českých zdrojích se lze setkat s označením úloha kolportéra novin. Podstata problematiky spočívá v určení množství jednoho druhu zboží, které má být objednáno na určité období, přičemž budoucí poptávka není známa. Dále je předpokládáno, že není k dispozici žádný skladovací prostor. Velikost objednávky také nelze v průběhu prodeje měnit a reagovat tak na případné odchylky od předpokládaného zájmu zákazníků. Vše se proto odvíjí od rozhodnutí v jednom daném okamžiku a cílem je zjistit optimum mezi podzásobením a přezásobením za účelem docílit co možná největšího zisku. Název modelu je odvozen od pouličního prodejce novin [4].

Každý den ráno majitel novinového stánku objedná dané množství novin na den. Prodejce z odhadu dané lokality či historických dat může přibližně předpovědět, kolik novin prodá, ovšem přesné číslo nezná, protože poptávka je náhodná proměnná. Pokud není pořízeno dostatečné množství, může prodejce do budoucna přijít o zákazníky, kteří budou zklamaní a při příštím nákupu si mohou zvolit jiné místo, čímž prodejce přichází o zisk. V opačném případě, přebytečné kusy jsou vyhozeny do sběru nebo prodány pod cenou a vznikají tak zbytečné náklady. Řešením tohohle problému je tedy najít optimální velikost ranní objednávky novin tak, aby byl maximalizován očekávaný profit z prodeje.

Model lze různě modifikovat (možnost uskladnění zboží do dalšího období, prodej více druhů zboží atd.) a následně aplikovat na vybrané inženýrské projekty a technické procesy.

## 2.1. Historie

První myšlenky newsvendor problému se začínají formovat na konci 19. století, kdy se irský ekonom Francis Ysidro Edgeworth zabýval bankovním problémem toku peněz, který se dá lepe specifikovat jako příjem a výdej peněžních prostředků. Cílem bylo najít optimální množství peněz pro banku, aby nedošlo k vyčerpání nebo přebytku hotovosti. Výsledkem tedy byla rovnováha mezi náklady spojenými s oběma situacemi.

V roce 1913 Ford Whitman Harris sestavil první model pro účely řízení zásob, speciálně pro plánování výroby. Tento model vznikl jako výsledek práce při hledání optimální produkce při minimálních nákladech a o několik let později byl rozšířen a do výpočtů byla zahrnuta i optimální velikost objednávky. Vznikl tedy model známý jako Economic Order Quantity (EOQ) [8], kde je spojitá poptávka a v čase se nemění. Princip je založen na konstantní poptávce a objednávkách o stejné velikosti. Po pořízení zásoby postupně klesají a v určitém čase je zapotřebí objednat další zásoby tak, aby na skladě byly včas, nejlépe v době prodeje posledního výrobku. Zároveň jsou minimalizovány náklady spojené s přepravou a skladování zboží.

Následující roky se newsvendor problem stával významnějším v operačním výzkumu a ekonomii pro určení optimálních skladovacích zásob a mnoho autorů navazovalo na již vytvořené modely a postupně je zobecňovali pro širší využití. [6]

## 2.2. Základní formulace

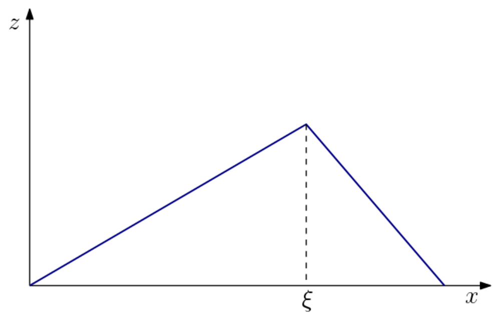
Nechť prodavač každé ráno objedná $x$ výtisků, každý za nákupní cenu $d$. Jeden kus se prodává za $c$. Poptávka čili množství, které je schopen prodat, je značeno $\xi$. Zároveň požadujeme nezápornost $x$ kvůli smysluplnosti úlohy. Snahou prodejce je mít co největší zisk $z$. Takto určený problém můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & z = f(x, \xi), \\ \text{za podmínky} \quad & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde účelová funkce $f(x, \xi)$ má předpis:

$$z = f(x, \xi) = \begin{cases} cx - dx, & \text{pro } x < \xi, \\ c\xi - dx, & \text{pro } x \geq \xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Vzhledem k zadání úlohy by měla být uvedena i celočíselnost. Ovšem z důvodu aplikací nebudeme tuhle podmínku zohledňovat.
Budeme-li uvažovat neměnnou poptávku, graf účelové funkce vypadá následovně:




Obrázek 2.1: Účelová funkce pro neměnnou poptávku

Tento předpoklad ovšem znehodnotí celou úlohu, protože ve skutečnosti je poptávka náhodný parametr a lze jej realizovat jako náhodnou veličinu se známým rozdělením pravděpodobnosti a střední hodnotou $E(\xi)$. Budeme tedy maximalizovat střední hodnotu $E(z)$.

$$\begin{aligned} E_\xi\{f(x,\xi)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dF(t) = \int_{-\infty}^{x} (ct - dx)dF(t) + \int_{x}^{\infty} (cx - dx)dF(t) \\ &= \int_{-\infty}^{x}(ct - dx)dF(t) + \int_{-\infty}^{x}(cx - dx)dF(t) - \int_{-\infty}^{x}(cx - dx)dF(t) + \int_{x}^{\infty}(cx - dx)dF(t) \\ &= \int_{-\infty}^{x} (ct - dx - cx + dx)dF(t) + \int_{-\infty}^{\infty} (cx - dx)dF(t) \\ &= (c - d)x - c\int_{x \geq t} (x - t)dF(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ohraničíme-li poptávku horní a dolní závorou, tj. $P(\xi \in [a, b]) = 1$, dostáváme následující účelovou funkci modelující střední hodnotu zisku

$$E_\xi\{f(x,\xi)\} = \begin{cases} (c - d)x, & \text{pro } x < a, \\ (c - d)x - c\int_{a}^{x} (x - t)dF(t), & \text{pro } x \in [a, b], \\ -dx + cE(\xi), & \text{pro } x > b. \end{cases} \tag{2.4}$$

## 2.3. Diskrétní rozdělení poptávky

V následujících řádcích se budeme věnovat diskrétnímu rozdělení poptávky, které můžeme interpretovat jako řešení jednotlivých scénářů, kdy každému je přidělena určitá pravděpodobnost. Taková situace může ve skutečnosti nastat tehdy, když si prodejce zanalyzuje historická data prodeje a vezme v úvahu nejčastější odbyty zboží.

Nechť $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ je vektor zvolených nezáporných hodnot poptávky a $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_s)$ je vektor příslušných pravděpodobností, kde $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$. Označme $\boldsymbol{y}^+ = (y_1^+, \ldots, y_s^+)$, respektive $\boldsymbol{y}^- = (y_1^-, \ldots, y_s^-)$, jako vektor nezáporných hodnot, které odpovídají počtu kusů chybějících, respektive přebývajících, ke splnění poptávky. Potom musí platit

$$x + y_i^+ - y_i^- = \xi_i, \tag{2.5}$$

$$\text{za podmínek} \quad x \geq 0,\ y_i^+ \geq 0,\ y_i^- \geq 0, \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, s\ . \tag{2.6}$$

Zisk lze obecně pro všechny hodnoty poptávky formulovat takto:

$$z_i = c\xi_i - dx - cy_i^+ + dy_i^- \tag{2.7}$$

Člen $dy_i^-$ vyjadřuje možnost vrátit neprodané kusy zpět za nákupní cenu. Vzhledem k tomu, že tímto způsobem nelze na proměnlivou poptávku reagovat, nebudeme tento člen uvažovat. Naopak, člen $cy_i^+$ odpovídá ztrátě způsobené nadbytkem zboží a tuto skutečnost podle formulace musíme zohlednit. Dostáváme tedy $z_i = c\xi_i - dx - c(\xi_i - x)_+$, kde dolní index + znázorňuje pouze kladné hodnoty v závorkách. Opět jsme se dostali k funkci (2.2) a po úpravě dojdeme k tvaru

$$\begin{aligned} z_i &= c\xi_i - dx + cx - cx - c(\xi_i - x)_+ = (c-d)x + c(\xi_i - x) - c(\xi_i - x)_+ \\ &= (c-d)x + c(\xi_i - x)_- = (c-d)x - c(x - \xi_i)_+. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pokusíme-li se nyní zohlednit všechny scénáře, dostáváme

$$z = \sum_{i=1}^{s} p_i z_i = (c-d)x - c\sum_{i=1}^{s} p_i (x - \xi_i)_+ = (c-d)x - c\sum_{i=1}^{s} p_i y_i^-. \tag{2.9}$$

Chceme docílit největšího zisku, tedy $\max\limits_x z$. Bohužel, derivace funkce $z$ není všude definovaná, a proto úlohu nemůžeme řešit analyticky a musíme při hledání extrému přejít k numerickým výpočtům či grafické metodě.

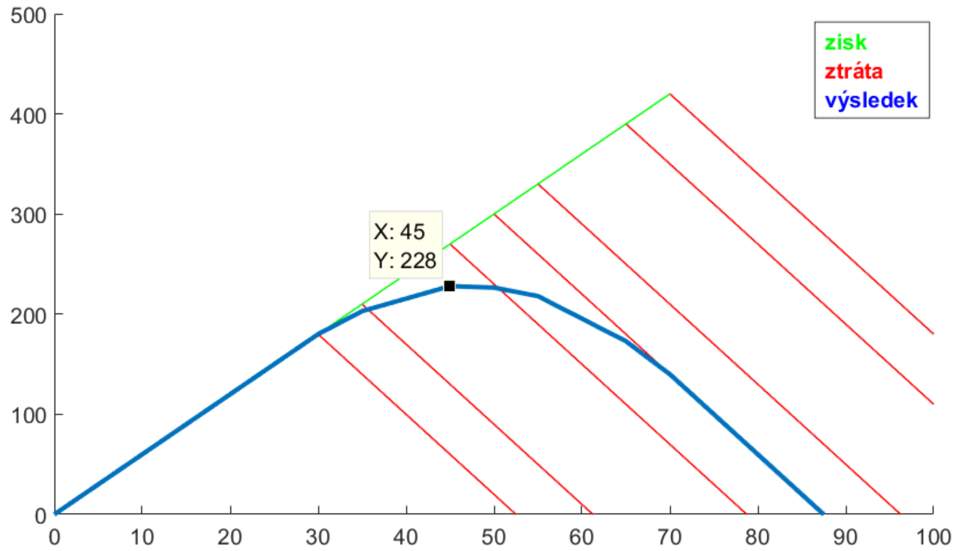
Podotkněme, že ke stejnému výsledku dospějeme i v případě využití odvození (2.3) a znalosti, že integrál je v případě diskrétní pravděpodobností funkce roven sumě součinů pravděpodobností a dané účelové funkce, tj. dostáváme:

$$\begin{aligned} E_\xi\{f(x,\xi)\} &= (c-d)x - c\int_{x \geq t} (x - t)\,dF(t) \\ &= (c-d)x - c\sum_{i=1}^{s} p_i (x - \xi_i)_+ \end{aligned} \tag{2.10}$$

**Příklad 1:** Zvolme následující vstupní data:

$$c = 14, d = 8, \xi = (30, 35, 45, 50, 55, 65, 70), p = (0{,}1; 0{,}15; 0{,}2; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}15; 0{,}1)$$

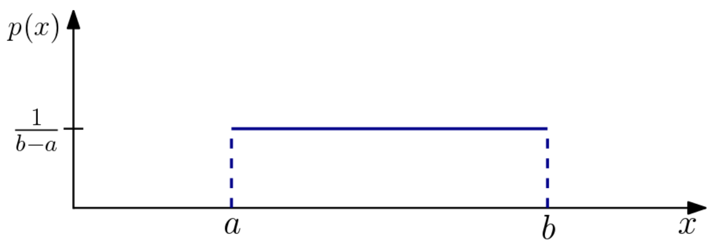
Z grafického výstupu (2.2) je patrné, že při zadaných hodnotách maximálního zisku dosáhneme právě tehdy, když $x = 45$.




Obrázek 2.2: Účelová funkce střední hodnoty zisku příkladu 1.

## 2.4. Rovnoměrné rozdělení poptávky

Nyní k aproximaci náhodné poptávky využijeme rovnoměrného rozdělení, které má obecně hustotu pravděpodobnosti znázorněnou na obrázku (2.3).




Obrázek 2.3: Hustota pravděpodobnosti pro rovnoměrné rozdělení

Vezmeme-li v úvahu odvození střední hodnoty zisku za ohraničené poptávky (2.4), dostáváme pro $\xi \sim U(a, b)$

$$E_\xi\{f(x,\xi)\} = \begin{cases} f_1(x) = (c-d)x, & \text{pro } x < a, \\ f_2(x) = (c-d)x - c\displaystyle\int_a^x (x-t)\frac{1}{b-a}dt = (c-d)x - \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)}, & \text{pro } x \in [a,b], \\ f_3(x) = -dx + c\dfrac{a+b}{2}, & \text{pro } x > b. \end{cases} \tag{2.11}$$

Vzhledem k tomu, že první, respektive třetí, interval má maximum v krajní hodnotě $a$, respektive $b$, lze předpokládat, že hledané maximum bude v intervalu $x_{max} \in [a, b]$. Hledáme tedy

$$\max_{x} \left\{ (c-d)x - \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)} \right\}. \tag{2.12}$$

Z vlastností extrémů dostáváme

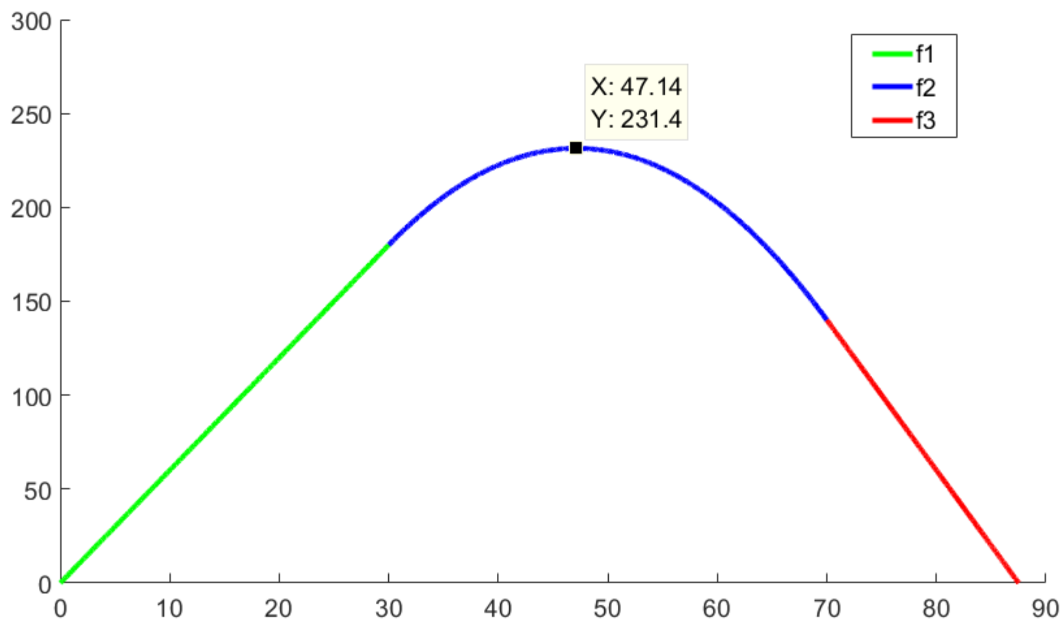
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left\{ (c-d)x - \frac{c(x-a)^2}{2(b-a)} \right\} \\ 0 &= (c-d) - \frac{2c(x-a)}{2(b-a)} \\ x_{\max} &= a + \frac{(c-d)(b-a)}{c}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Druhá derivace střední hodnoty zisku je v tomto případě záporná pro všechna $x$, tím pádem se tedy skutečně jedná o maximum, viz. věta (1.2.8).

**Příklad 2:** Zvolme následující vstupní data:

$$c = 14, d = 8, \xi \sim U[30, 70]$$

Po dosazení do odvozeného vzorce pro $x_{\max}$ dostáváme hodnotu 47,14. Stejného výsledku jsme dosáhli využitím sestrojeného grafu (viz. obrázek (2.4))

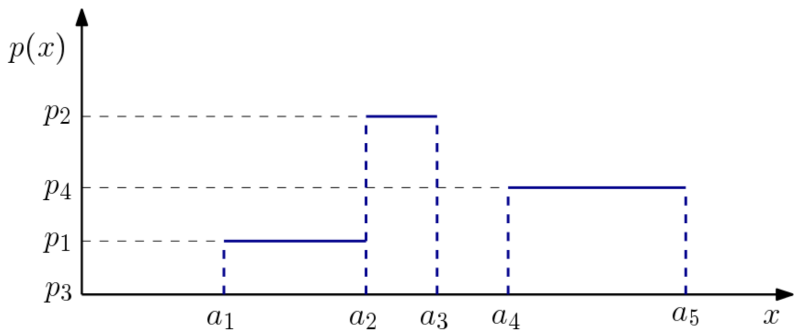



Obrázek 2.4: Účelová funkce střední hodnoty zisku příkladu 2.

## 2.5. Po částech rovnoměrné rozdělení poptávky

V následující části se pokusíme zobecnit rovnoměrné rozdělení, kdy hustota pravděpodobnosti nebude konstantní na jednom intervalu, ale bude se skokově měnit v rámci několika intervalů. Názorný příklad hustoty pravděpodobnosti skládající se z $n$ a dvou krajních (kde hustota je rovna nule) intervalů je znázorněn na grafu (2.5) (označován jako histogram), kde $p_i$ jsou funkční hodnoty pro hustotu definovanou po částech odpovídajících daným intervalům. Předpokládáme, že

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(a_{i+1} - a_i) = 1.$$




Obrázek 2.5: Hustota pravděpodobnosti pro po částech rovnoměrné rozdělení, $n = 4$

Pro odvození a matematický zápis střední hodnoty zisku využijeme opět vztahu (2.3) a také již odvozené funkce pro rovnoměrné rozdělení s jedním intervalem (2.11). Po úpravách dostáváme

$$E_\xi\{f(x,\xi)\} =$$

$$\begin{cases} f_0(x) = (c-d)x, & \text{pro } x < a_1, \\ f_1(x) = (c-d)x - \dfrac{c(x-a_1)^2}{2}p_1, & \text{pro } x \in [a_1, a_2], \\ f_2(x) = (c-d)x - c\Big(p_1(a_2-a_1)(x - \dfrac{a_2+a_1}{2}) + \dfrac{(x-a_2)^2}{2}p_2\Big), & \text{pro } x \in [a_2, a_3], \\ \vdots & \\ f_n(x) = (c-d)x - c\Bigg(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\Big(p_i(a_{i+1}-a_i)(x - \dfrac{a_{i+1}+a_i}{2})\Big) + \dfrac{(x-a_n)^2}{2}p_n\Bigg), & \text{pro } x \in [a_n, a_{n+1}], \\ f_{n+1}(x) = (c-d)x - c\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(p_i(a_{i+1}-a_i)(x - \dfrac{a_{i+1}+a_i}{2})\Big), & \text{pro } x > a_{n+1}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Vzhledem k tomu, že funkce je rozdělená do $n+2$ intervalů, lze jen velmi těžko předem určit a analyticky odvodit, ve které oblasti bude globální extrém. Pokud bychom zvolili správný interval, dostáváme s využitím vlastností extrému následující vztah pro maximum:

$$0 = \frac{d}{dx}\left\{(c-d)x - c\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(p_i(a_{i+1}-a_i)(x - \frac{a_{i+1}+a_i}{2})\right) + \frac{(x-a_n)^2}{2}p_n\right)\right\}$$

$$0 = (c-d) - c\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(p_i(a_{i+1}-a_i)\right) + (x-a_n)p_n\right) \tag{2.15}$$

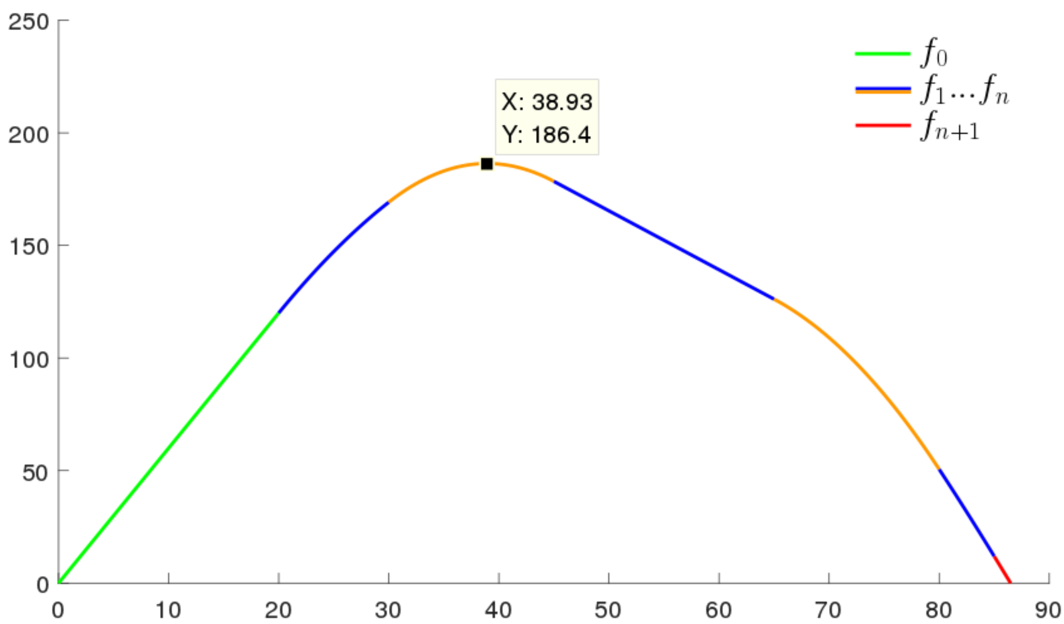
$$x_{\max} = a_n + \left(c - d - c\sum_{i=1}^{n-1}\left(p_i(a_{i+1}-a_i)\right)\right)\frac{1}{p_n}.$$

Zvolení intervalu můžeme provést například sledováním funkční hodnoty nebo směrnice tečny v jednotlivých uzlech vektoru $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

**Příklad 3:** Zvolme rozdělení hustoty pravděpodobnosti na 5 intervalů a následující vstupní data:

$$c = 14, d = 8,\ \vec{a} = (20, 30, 45, 65, 80, 85),\ \vec{p} = (\frac{2}{130}, \frac{4}{130}, 0, \frac{3}{130}, \frac{1}{130}),$$

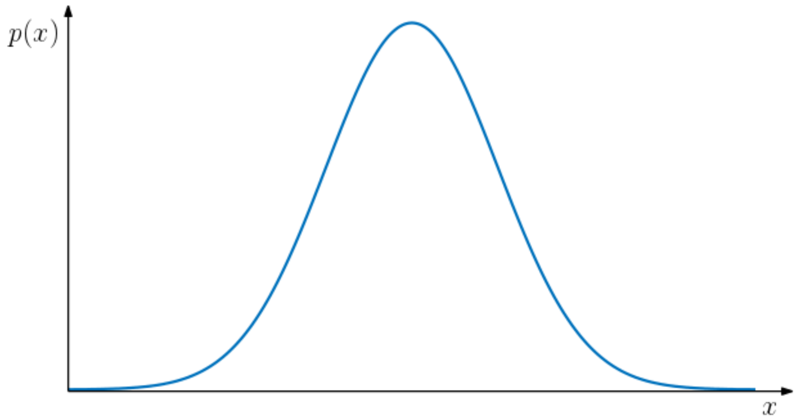
kde $\vec{a}$ je vektor obsahující jednotlivé uzly. Z grafu (2.6) je patrné, že zvolený problém nabývá maxima v intervalu funkce $f_2$. Dosazením do odvozeného vzorce (2.15) dostáváme hodnotu $x_{\max} = 38{,}9286$. Zaokrouhlenou hodnotu jsme získali i odečtením maxima z grafu.




Obrázek 2.6: Účelová funkce střední hodnoty zisku příkladu 3.

## 2.6. Normální rozdělení poptávky

K aproximaci náhodné poptávky můžeme také využít normálního rozdělení, které odpovídá více skutečnosti než předchozí rozdělení, protože zohledňuje i možnost extrémních hodnot poptávky v případě mimořádných situací. Hustota pravděpodobnosti je znázorněna na obrázku (2.7).




Obrázek 2.7: Hustota pravděpodobnosti pro normální rozdělení - Gaussova křivka

Pro odvození účelové funkce vyjdeme z (2.3) a budeme tedy předpokládat, že $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Označme distribuční funkci normálního rozdělení jako $\Phi(\cdot)$ a proveďme následující úpravy:

$$
\begin{aligned}
E_\xi\{f(x,\xi)\} &= (c-d)x - c\int_{-\infty}^{x}(x-t)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \\
&= (c-d)x - c(x-\mu)\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) + \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\frac{t-\mu}{\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \\
&= (c-d)x - c(x-\mu)\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) + \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad (2.16) \\
&= (c-d)x - c(x-\mu)\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) + \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-u}du \\
&= (c-d-c\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}))x + c\mu\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}
$$

Pro nalezení extrému opět využijeme jeho vlastností, tzn.

$$
\begin{gathered}
0 = \frac{d}{dx}[E_\xi\{f(x,\xi)\}] = \\
c-d-c\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - c(x-\mu)\frac{d}{dx}[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})] - \frac{c\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2}) = \\
c-d-c\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \frac{cx}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{c\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x-\mu) = \\
c-d-c\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).
\end{gathered} \qquad (2.17)
$$

Po převedení distribuční funkce na druhou stranu rovnosti a vydělením konstantou $c$ dostáváme

$$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = 1 - \frac{d}{c}. \tag{2.18}$$

Využijeme pojem $p$-kvantil $= u_p$. Jedná se o bod, ve kterém distribuční funkce nabývá hodnoty $p$, tzn. platí $\Phi(u_p) = p$. Dojdeme tedy ke vztahu

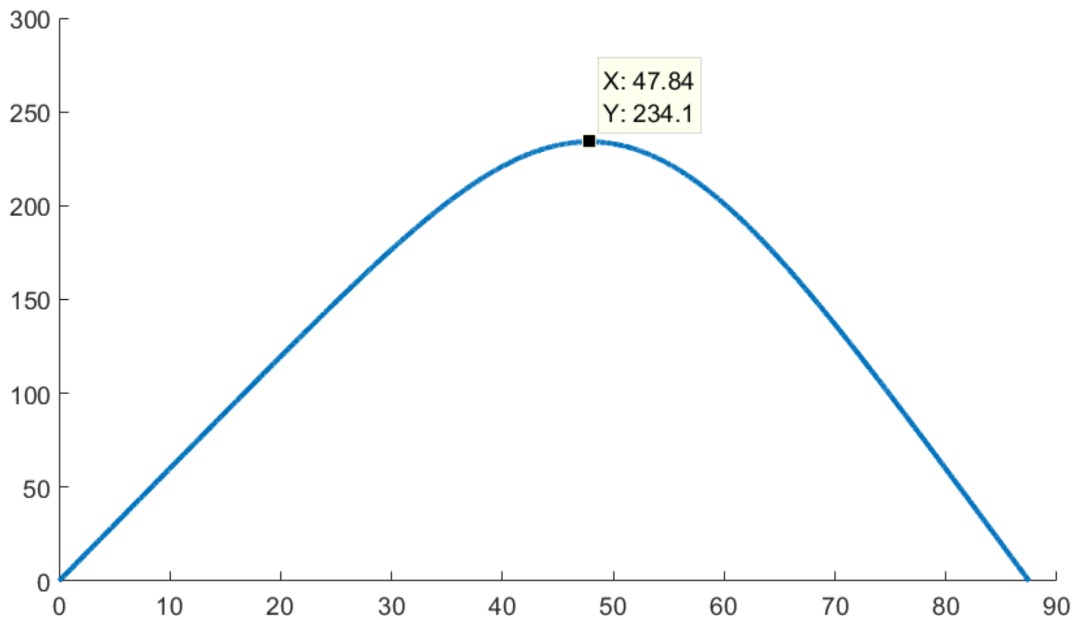
$$x_{\max} = \mu + \sigma u_{1-\frac{d}{c}}, \tag{2.19}$$

kde $u_{1-\frac{d}{c}}$ je $(1-\frac{d}{c})$-kvantil normálního rozdělení s parametry $N(0,1)$, které má hodnoty distribuční funkce snadno dohledatelné v tabulkách. Vzhledem k tomu, že druhá derivace střední hodnoty zisku je opět záporná pro všechna $x$, jedná se o konkávní funkci, tj. nalezený extrém je skutečně maximum.

**Příklad 4:** Zvolme následující vstupní data:

$$c = 14, d = 8, \xi \sim N[50, 144]$$

Z tabulek pro distribuční funkci zjistíme hodnotu příslušného $\frac{3}{7}$-kvantilu, jehož hodnota je přibližně $u_{\frac{3}{7}} = -0{,}18$. Po dosazení do odvozeného vzorce (2.19) dostáváme hodnotu $x_{\max} = 47{,}84$. Stejně přesného výsledku jsme také dosáhli využitím sestrojeného grafu (viz. obrázek (2.8)).




Obrázek 2.8: Účelová funkce střední hodnoty zisku příkladu 4.

**Poznámka:** Z uvedených příkladů lze vypozorovat, že optimální hodnota je právě zmíněný $(1-\frac{d}{c})$-kvantil použitého rozdělení. Důkaz provedeme následujícím výpočtem. Vyjdeme z (2.3)

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\{(c-d)x - c\int_{-\infty}^{x}(x-t)dF(t)\} = \\
c-d-c\frac{d}{dx}\{\int_{-\infty}^{x} x\ dF(t) - \int_{-\infty}^{x} t\ dF(t)\} = \\
c-d-c\frac{d}{dx}\{xF(x) - [tF(t)]_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} F(t)\ dt\} = \\
c-d-c\frac{d}{dx}\{xF(x) - xF(x) + \int_{-\infty}^{x} F(t)\ dt\} = \\
c-d-c\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} F(t)\ dt = \\
c-d-cF(x) = 0
\end{gathered} \tag{2.20}$$

a pro libovolné rozdělení tedy máme

$$1-\frac{d}{c} = F(x), \tag{2.21}$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce vybraného rozdělení. Využijeme-li opět vlastnosti kvantilu dostáváme výsledek

$$x_{\max} = u_{1-\frac{d}{c}}. \tag{2.22}$$

□

# 3. Projekt: Továrna na výrobky

Tato kapitola je věnována řešení smyšleného projektu. Jedná se o aplikaci úlohy kolportéra novin pro investiční rozhodování, kde je nutné uvažovat také výrobní a tedy obecněji technické procesy. Problematika je následující:

Nechť existuje společnost zpracovávající nakoupený materiál do několika druhů výrobků, které následně prodává zákazníkům. Za účelem budoucího většího zisku chce investovat peníze a rozšířit pole působnosti o další region. Otázkou je, jakou výši finančních prostředků je třeba investovat, aby se investice pokud možno co nejvíce vyplatila. V takovém případě se nejprve provede výzkum trhu zvoleného regionu a následná analýza dat nám poskytne přibližnou poptávku po jednotlivých výrobcích, kterou aproximujeme náhodnou veličinou s vhodně zvoleným rozdělením. Dále je třeba stanovit náklady na postavení a vybavení továrny. Budeme brát v úvahu, že máme k dispozici pozemek s pevně danou rozlohou, tj. jsme limitováni maximální velikostí továrny. Předpokládejme také, že v případě malé poptávky není žádoucí vůbec projekt uskutečnit. V neposlední řadě musíme stanovit prodejní cenu výrobků a také náklady na výrobky zahrnující jak cenu materiálu, tak i provozní náklady a mzdy zaměstnancům. Můžeme očekávat, že při výrobě mohou nastat komplikace způsobené strojem nebo lidským faktorem, které vyústí v neprodejný výrobek. Také musíme zohlednit fakt, že výroba továrny nemůže být nekonečná. Z toho důvodu budeme v našem modelu uvažovat koeficient či omezující funkci zohledňující účinnost výroby.

Lze předpokládat ještě několik dalších omezení či nákladů spojené s výrobou, které by mohly být uvedeny, ovšem většinu lze zahrnout do již zavedených parametrů.

## 3.1. Formulace pro jeden výrobek

Nyní se pokusíme matematicky naformulovat optimalizační úlohu a sestavit model skládající se z účelové a omezujících funkcí. Vzhledem k tomu, že úloha je ze své podstaty stochastická, vyskytují se některé parametry ve formě náhodných veličin, které budeme značit pomocí $\xi$. Nejdříve uvedeme výčet vystupujících proměnných a parametrů

- proměnná $x$: velikost továrny
- proměnná $y$: množství vyráběného výrobku
- parametr $q(x)$: náklady na postavení a vybavení továrny
- parametry $l, u$: dolní a horní omezení pro velikost továrny
- parametr $h(\xi)$: poptávka
- parametr $c$: prodejní cena výrobku
- parametr $d$: náklady na výrobu výrobku
- parametr $t$: transformační koeficient - účinnost továrny

Cílem je tedy zjistit hodnoty proměnných, tedy množství vyráběného zboží, optimální velikost továrny a s tím spojenou výši investice v závislosti na daných parametrech.

Teď můžeme přejít k matematickému vyjádření úlohy. Využijeme již získaných poznatků z úlohy kolportéra novin, princip úlohy je analogický. Vezmeme-li v úvahu jen jeden výrobek, zápis vypadá následovně:

$$
\begin{aligned}
\max_x z \quad & = -q(x) + \mathcal{G}(x), \\
\text{za podmínky} \quad & x \in [l, u], \\
\mathcal{G}(x) \quad & = \max_y E_\xi \mathcal{Q}(x, y, \xi), \\
\mathcal{Q}(x, y, \xi) \quad & = \begin{cases} cy - dy, & \text{pro } y < \xi, \\ c\xi - dy, & \text{pro } y \geq \xi. \end{cases} \\
\text{za podmínky} \quad & y \leq tx \\
& y \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

## 3.2. Příklad pro tři výrobky

Nyní se pokusíme o řešení testovacího příkladu. Vezměme v potaz následující:

- Cílem je najít optimální velikost továrny, tak abychom dosáhli co možná největšího zisku v průběhu vytyčeného období, které můžeme stanovit na 20 let. Tato doba odpovídá životnosti továrny, tzn. době, během které není třeba investovat další peníze, krom nákladů na samotný výrobek.
- Cena na postavení a vybavení továrny je určena následující funkcí

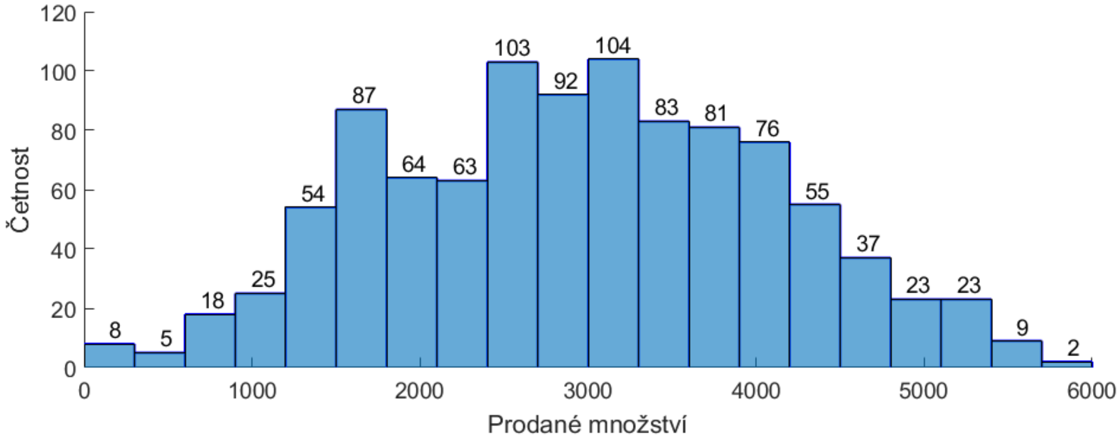
$$q = 5\,000x. \tag{3.2}$$

- Jak již bylo zmiňováno, velikost továrny je limitována určitými parametry, které definujeme jako
    - dolní mez $l = 5\,000$,
    - horní mez $u = 30\,000$.
- Předpokládejme, že v rámci projektu jsme schopni vyrábět pouze tři výrobky a cílem je najít optimální množství $y_1, y_2, y_3$ vyráběných výrobků.
- Produkce továrny nemůže být nekonečná a má tedy určitá omezení. Uvažujme následující omezující funkci

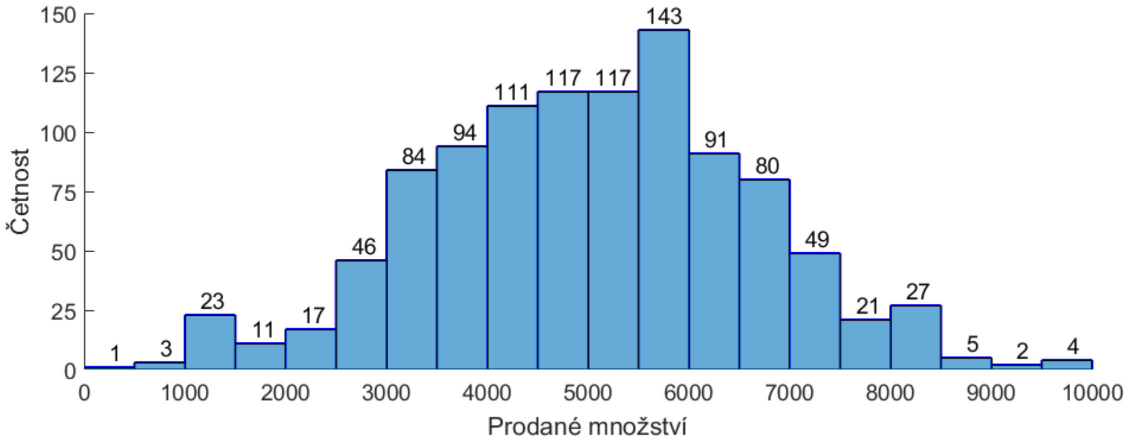
$$g(x, \boldsymbol{y}) = -x + 2y_1 + 2{,}5y_2 + 4y_3 \tag{3.3}$$

  a požadujeme, aby $g(x, \boldsymbol{y}) \leq 0$. Funkce modeluje využití výkonu továrny s přihlédnutím i k případným ztrátám, tj. je zde zohledněna analogie parametru $t$ z (3.1).

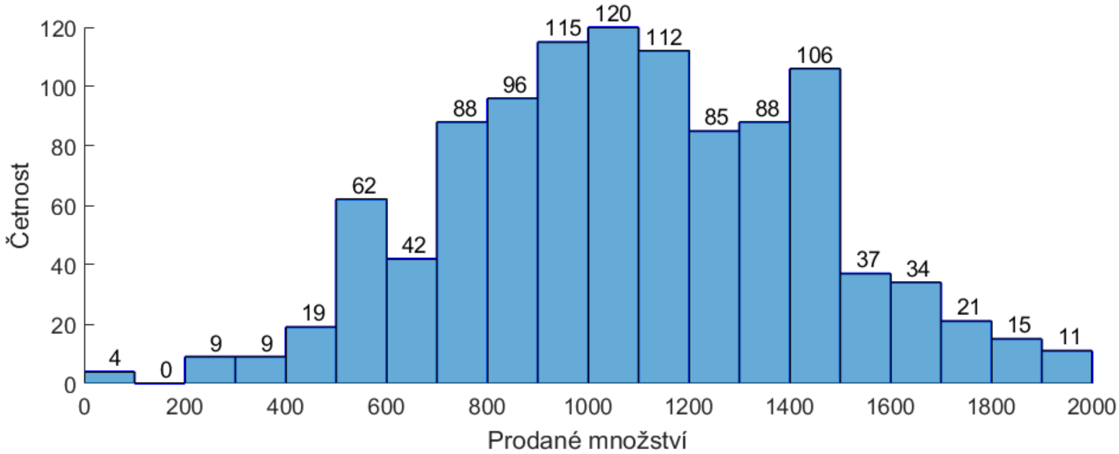
- Poptávku pro jednotlivé výrobky budeme realizovat náhodnou proměnnou s po částech rovnoměrným rozdělením. Příslušné histogramy jsou znázorněny na následujících obrázcích:




Obrázek 3.1: Histogram poptávky pro výrobek č.1.




Obrázek 3.2: Histogram poptávky pro výrobek č.2.




Obrázek 3.3: Histogram poptávky pro výrobek č.3.

- Prodejní ceny výrobků mohou být realizovány příslušnými náhodnými veličinami, protože 20 let je poměrně dlouhý časový úsek a ceny v jednotlivých letech mohou kolísat. Ovšem budeme předpokládat, že variabilita ceny je již zahrnuta v realizaci poptávky, tím pádem budeme uvažovat konstantní částku.
    - $c_1 = 20\,000$,
    - $c_2 = 22\,000$,
    - $c_3 = 28\,500$.
- Náklady zahrnují veškeré výdaje spojené se samotnou výrobou jednotlivých výrobků, tj. zahrnují materiál, energie, mzdy atd.
    - $d_1 = 3\,500$,
    - $d_2 = 3\,750$,
    - $d_3 = 8\,500$.

## 3.3. Řešení a interpretace výsledků

V následujících řádcích se budeme věnovat řešením zadané úlohy. Pro nalezení optimálních hodnot proměnných využijeme matematického softwaru GAMS, který je speciálně vyvinut pro modelování a optimalizaci. Jednou z možností, jak naprogramovat úlohu, je využít sumační symboliku (podrobněji v [9]) a získané poznatky z kapitoly (2.3). Úlohu tedy budeme řešit scénářovým způsobem a matematický zápis (3.1) musíme přeformulovat. Zde již vezmeme v úvahu naší situaci vzhledem k tomu, že nepracujeme jen s jedním výrobkem, zohledníme tuto skutečnost sumou přes všechny výrobky, případně lze využít vektorový zápis. Výsledná forma testovacího příkladu vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \max_{x} z \quad &= -q(x) + C(x), \\ \text{za podmínky} \quad & x \in [l, u], \\ C(x) \quad &= \max_{\boldsymbol{y}} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{s} (c_j - d_j) y_j - c_j p_{ij} (y_j - \xi_{ij})_+, \\ \text{za podmínky} \quad & g(x, \boldsymbol{y}) \leq 0 \\ & y_j \geq 0, \qquad \text{pro } j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde index + znamená, že bereme v úvahu pouze kladné hodnoty v jednotlivých složkách. Číslo $s$ vyjadřuje počet jednotlivých scénářů.

Nyní je ještě třeba si připravit aproximaci poptávky. V zadání totiž figurují spojité náhodné veličiny, ovšem pro scénářový přístup potřebujeme diskrétní rozdělení. Využijeme poznatků o diskretizaci spojitého rozdělení v [10], vhodně zvolíme jednotlivé body s ekvidistantním dělením a s tím související celkový počet bodů. Ačkoliv se zdá být vyšší počet dělení přesnější, pozorovatelné zpřesnění platí pouze do určité meze. Odchylka se totiž se zvyšujícím se počtem bodů asymptoticky blíží k jisté hodnotě. Jednotlivé histogramy jsme rozdělili na 201 scénářů, jejichž přesné vyjádření lze nalézt na přiloženém CD-romu.

Po spuštění naprogramovaného kódu v softwaru GAMS dostáváme následující výsledky:

$$\begin{aligned} \text{Celkový zisk: } & z = 34\,249\,070, \\ \text{Optimální velikost továrny: } & x_{opt} = 18\,075, \\ \text{Optimální množství výrobků: } & y_{1_{opt}} = 2\,400, \\ & y_{2_{opt}} = 3\,950, \\ & y_{3_{opt}} = 850. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Z těchto výsledků je zřejmé, že optimální výše investice je rovna

$$q(x_{opt}) = 5\,000 \cdot 18\,075 = 90\,375\,000. \tag{3.6}$$

**Poznámka:** Na závěr podotkněme, že veškerá nalezená podobnost s realitou je čistě náhodná. Hodnoty všech proměnných a parametrů jsou uváděny jako bezrozměrné, lze je tudíž interpretovat různými způsoby. Cílem bylo demonstrovat získané poznatky na obecném modelu, který je možno přizpůsobit rozličným situacím.

# Závěr

Cílem bakalářské práce bylo poskytnou případnému čtenáři základní informace a poznatky o optimalizaci speciálně zaměřené na úlohu kolportéra novin, která je důležitým modelem v oblasti řízení zásob.

První kapitola shrnuje základní znalosti o pravděpodobnosti, matematické analýze a optimalizaci, které se dále využívají při odvozování v následujících částech práce.

Druhá kapitola je věnována samotnému modelu kolportéra novin. Po krátkém uvedení do problému a stručné historii následuje odvození a formulace obecného modelu, na který jsou poté aplikovány uvažované realizace poptávek. Přesněji se jedná o diskrétní, rovnoměrné, rovnoměrné po částech a normální rozdělení, které jsou doplněny o krátký ilustrační příklad s grafickým řešením vytvořeném v softwaru MATLAB. Na závěr této kapitoly je uvedeno odvození obecného vztahu optimálního řešení pro libovolné rozdělení.

Třetí kapitola se zabývá aplikací získaných poznatků z druhé kapitoly. Jedná se o řešení projektu imaginární továrny produkující výrobky, které jsou následně prodávány. Cílem je zjistit optimální výši investice. Celá problematika je namodelována a vstupní parametry pro testovací příklad jsou náhodně vygenerované či zvolené. Následné řešení je získáno pomocí optimalizačních algoritmů v softwaru GAMS.

# Literatura


[1] ANDĚL, Jiří. *Statistické metody.* 4., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378-003-8.

[2] CABALKA, Matouš. *Celočíselná optimalizace pro řešení dopravních úloh.* Brno, 2016. 46 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr.Pavel Popela, Ph.D.

[3] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody.* Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 110 s. ISBN 978-80-214-3752-4.

[4] HILL, Arthur V. The newsvendor problem. *Clamshell Beach Press.* 2011. 24 s.

[5] HOŠEK, Jaromír. *Optimalizační modely pro energetické využití odpadu.* Brno, 2015. 62 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr.Pavel Popela, Ph.D.

[6] HRABEC, Dušan. *Mathematical programs for dynamic pricing-demand based management.* Brno, 2016. 119 s. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce prof. Kjetil Kåre Haugen, PhD.

[7] HRABEC, Dušan, Pavel POPELA, Jan NOVOTNÝ, Kjetil HAUGEN a Asmund OLSTAD. A note on the newsvendor problem with pricing. *18th International Conference on the Soft Computing MENDEL 2012.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2012. s. 410-415.

[8] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

[9] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. *Metody operačního výzkumu.* Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001, 165 s. ISBN 80-214-1839-7.

[10] KNOTEK, Stanislav. *Úlohy dvojstupňového stochastického programování.* Brno, 2006. 60 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr.Pavel Popela, Ph.D.

[11] KUREŠ, Miroslav. *Přednášky matematické analýzy.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.

[12] Kůdela, Jakub. *Stochastic optimization in AIMMS.* Brno, 2014. 65 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce RNDr.Pavel Popela, Ph.D.

[13] NEUBAUER, Jiří, Marek SEDLAČÍK a Oldřich KŘÍŽ. *Základy statistiky: aplikace v technických a ekonomických oborech.* Praha: Grada, 2012, 236 s. ISBN 978-80-247-4273-1.

[14] POPELA, Pavel, Michaela ULVEROVÁ a Radovan ŠOMPLÁK. Nové aplikace úlohy kolportéra novin. *Informační bulletin České statistické společnosti.* Praha: Česká statistická společnost, 2011. s. 164-169.

# Přílohy

## NVdiskretni.m

Zde je uveden zdrojový kód pro výpočet úlohy kolportéra novin při diskrétní poptávce.

```
function [x_opt ,maxz] = NVdiskretni(a,b,c,d )
%% POZNÁMKY
% Řešení úlohy kolportéra novin
% Zvolené rozdělení poptávky:
% Diskrétní rozdělení
%
%VSTUPY:
% a ... řádkový vektor uzlů
% b ... řádkový vektor četností jednotlivých uzlů
% c ... prodejní cena
% d ... náklady
%
%VÝSTUPY
% x_opt ... optimální hodnota koupených kusů
% maxz ... odpovídající zisk
%
% VZOROVÉ VOLÁNÍ:
% [x_opt ,maxz]=NVdiskretni( [30 35 45 50 55 65 70],[0.1 0.15 0.2
    0.1 0.2 0.15 0.1],14,8 )

%% TĚLO KÓDU
n=length(a);
b=b./sum(b);
z=[a;b];
[a_sorted , a_order] = sort(z,2);
b=b(a_order(1,:));
a=[0 a 2*a(n)];
hold on;
f=@(x) (c-d).*x;
plot([a(1) a(n+1)],[f(a(1)) f(a(n+1))],'g');
for i=2:n+1
    y=[a(i),a(n+2)];
    g=@(x) -d.*(x-a(i))+(c-d).*a(i);
    plot(y,g(y),'r')
end;
y=zeros(1,n+2);
g=@(x) (c-d).*x;
y(2)=g(a(2));
for i=3:n+2
    h{i-2}=@(x) (x-(a(i-1))).*b(i-2);
    g=@(x) (c-d).*x-c.*sum(cellfun(@(o) o(x),h));
    y(i)=g(a(i));
end;
plot(a,y);
[maxz,por]=max(y);
x_opt=a((por-1));
end
```

# NVrovnom.m

Zde je uveden zdrojový kód pro výpočet úlohy kolportéra novin při spojité poptávce s rovnoměrným rozdělením.

```
function [ x_opt,maxz ] = NVrovnom(a,b,c,d )
%% POZNÁMKY
% Řešení úlohy kolportéra novin
% Zvolené rozdělení poptávky:
% Rovnoměrné rozdělení
%
%VSTUPY:
% a ... levý uzel
% b ... pravý uzel
% c ... prodejní cena
% d ... náklady
%
%VÝSTUPY
% x_opt ... optimální hodnota koupených kusů
% maxz  ... odpovídající zisk
%
% VZOROVÉ VOLÁNÍ:
% [x_opt,maxz]=NVrovnom(30,70,14,8)

%% TĚLO KÓDU
f1=@(x) (c-d).*x;
f2=@(x) (c-d).*x-((c.*(x-a).*(x-a))/(2.*(b-a)));
f3=@(x) -d.*x+c.*0.5.*(a+b);

hold on;
plot(0:0.01:a,f1(0:0.01:a),'g')
plot(a:0.01:b,f2(a:0.01:b),'b')
plot(b:0.01:(b+50),f3(b:0.01:(b+50)),'r')
x_opt=a+((b-a)*(c-d))/c;
maxz=f2(x_opt);
end
```

# NVrovnomcast.m

Zde je uveden zdrojový kód pro výpočet úlohy kolportéra novin při spojité poptávce s rovnoměrným rozdělením po částech.

```
function [ x_opt,maxz ] = NVrovnomcast(a,b,c,d )
%% POZNÁMKY
% Řešení úlohy kolportéra novin
% Zvolené rozdělení poptávky:
% Rovnoměrné rozdělení po částech
%
%VSTUPY:
% a ... řádkový vektor uzlů
% b ... řádkový vektor četností mezi uzly
% c ... prodejní cena
% d ... náklady
%
%VÝSTUPY
% x_opt ... optimální hodnota koupených kusů
% maxz  ... odpovídající zisk
%
% VZOROVÉ VOLÁNÍ:
% [x_opt,maxz]=NVrovnomcast([20 30 45 65 80 85],[2 4 0 3 1],14,8)

%% TĚLO KÓDU
format long
m=length(a);
a(m+1)=a(m)*2;
g=@(x) (c-d).*x;
plot(0:0.01:a,g(0:0.01:a(1)),'g')
hold on;
S=0;
for i=1:(m-1)
    S=S+((a(i+1)-a(i))*b(i));
end;
h=@(x, o, p) (((c.*(x-o).*(x-o))/2).*(p/S));
f=@(x) g(x)-h(x, a(1), b(1));
[maxz,por]=max(f(a(1):0.01:a(2)));
x_opt=a(1)+(por-1)*0.01;
plot(a(1):0.01:a(2),f(a(1):0.01:a(2)),'b')
gg=@(x) 0;
for i=2:(m-1)
    gg=@(x) gg(x) + ((c.*b(i-1)./S).*((x.*a(i))-(a(i)*a(i)/2)-(x.*a(i-1))+(a(i-1)*a(i-1)/2)));
    f=@(x) g(x)-h(x, a(i), b(i)) -gg(x);
    if maxz<max([maxz,f(a(i):0.01:a(i+1))]);
        [maxz,por]=max([maxz,f(a(i):0.01:a(i+1))]);
        x_opt=a(i)+(por-2)*0.01;
    end;
    if mod(i,2)==0
    plot(a(i):0.01:a(i+1),f(a(i):0.01:a(i+1)),'Color', [1, 0.6, 0.0])
    else
    plot(a(i):0.01:a(i+1),f(a(i):0.01:a(i+1)),'b')
    end;
end;
E=0;
for i=1:(m-1)
    E=E+(((a(i+1)+a(i))/2).*(b(i)*(a(i+1)-a(i))/S));
end;
f=@(x) -d.*x+c.*E;
plot(a(m):0.01:a(m+1),f(a(m):0.01:a(m+1)),'r')
end
```

# NVnormalni.m

Zde je uveden zdrojový kód pro výpočet úlohy kolportéra novin při spojité poptávce s normálním rozdělením.

```
function [ x_opt,maxz ]= NVnormalni(st,roz,c,d )
%% POZNÁMKY
% Řešení úlohy kolportéra novin
% Zvolené rozdělení poptávky:
% Normální rozdělení
%
%VSTUPY:
% st ... střední hodnota
% roz ... rozptyl
% c ... prodejní cena
% d ... náklady
%
%VÝSTUPY
% x_opt ... optimální hodnota koupených kusů
% maxz ... odpovídající zisk
%
% VZOROVÉ VOLÁNÍ:
% [x_opt,maxz]=NVnormalni(50,144,14,8)

%% TĚLO KÓDU
r=sqrt(roz);
maxXgraf=st*2;
g=@(x) (1./(sqrt(2.*pi))).*exp(-x.*x./2);
xx=0:0.01:maxXgraf;
y=zeros(1,((maxXgraf*100)+1));
for i=1:((maxXgraf*100)+1)
    u=(xx(i)-st)/r;
    a=integral(g,-inf,u);
    y(i)=((c-d-(c*a)).*xx(i))+(c*st*a)-((c*r)/sqrt(2*pi)).*exp(-(xx(i)-st)*(xx(i)-st)/(2*r*r));
end
hold on;
[maxz,por]=max(y);
x_opt=xx(por);
plot(xx,y)
```

## Továrna.gms

Zde je uveden zdrojový kód pro řešení projektu imaginární továrny.

```
set i / 1 * 201 /
    j / 1 * 3 /;
scalar q / 5000 /
       l / 5000 /
       u / 30000 /;
parameter c(j) /1 20000
                2 22000
                3 38500/

          d(j) /1 3500
                2 3750
                3 8500 /

          e(j) /1 2
                2 2.5
                3 4 /;
parameter xi(i,j)
          p(i,j);
$call gdxxrw.exe hodnoty.xlsx par=xi rng=A5:D206 par=p rng=F5:I206
$gdxin hodnoty.gdx
$load xi, p
$gdxin

variable z;
positive variable X,Y(j),M(i,j),N(i,j);
equations ucelfce, poptavka(i,j),vyroba;
ucelfce.. z=e=-q*X+sum(j, sum(i,((c(j)-d(j))*Y(j)-c(j)*N(i,j))*p(i,j)));
poptavka(i,j).. Y(j)+M(i,j)-N(i,j)=e=xi(i,j);
vyroba.. X =g= sum(j,e(j)*Y(j));
X.lo = l;
X.up = u;
model NV /all/;
solve NV max z using LP;
display z.L,X.l,Y.l;
```

# hodnoty.xlsx

Zde je uvedena část vstupních dat zdiskretizovaných histogramů pro GAMS.

ξ(i,j) = Prodané množství
j.. Číslo výrobku {1;2;3}
i.. Číslo scénáře {1;2;…;201}

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 30 | 50 | 10 |
| 3 | 60 | 100 | 20 |
| 4 | 90 | 150 | 30 |
| 5 | 120 | 200 | 40 |
| 6 | 150 | 250 | 50 |
| 7 | 180 | 300 | 60 |
| 8 | 210 | 350 | 70 |
| 9 | 240 | 400 | 80 |
| 10 | 270 | 450 | 90 |
| 11 | 300 | 500 | 100 |
| 12 | 330 | 550 | 110 |
| 13 | 360 | 600 | 120 |
| 14 | 390 | 650 | 130 |
| 15 | 420 | 700 | 140 |
| 16 | 450 | 750 | 150 |
| 17 | 480 | 800 | 160 |
| 18 | 510 | 850 | 170 |
| 19 | 540 | 900 | 180 |
| 20 | 570 | 950 | 190 |
| 21 | 600 | 1000 | 200 |
| 22 | 630 | 1050 | 210 |
| 23 | 660 | 1100 | 220 |
| 24 | 690 | 1150 | 230 |
| 25 | 720 | 1200 | 240 |
| 26 | 750 | 1250 | 250 |
| 27 | 780 | 1300 | 260 |
| 28 | 810 | 1350 | 270 |
| 29 | 840 | 1400 | 280 |
| 30 | 870 | 1450 | 290 |
| 31 | 900 | 1500 | 300 |
| 32 | 930 | 1550 | 310 |
| 33 | 960 | 1600 | 320 |
| 34 | 990 | 1650 | 330 |
| 35 | 1020 | 1700 | 340 |
| 36 | 1050 | 1750 | 350 |
| 37 | 1080 | 1800 | 360 |
| 38 | 1110 | 1850 | 370 |
| 39 | 1140 | 1900 | 380 |
| 40 | 1170 | 1950 | 390 |
| 41 | 1200 | 2000 | 400 |
| 42 | 1230 | 2050 | 410 |
| 43 | 1260 | 2100 | 420 |
| 44 | 1290 | 2150 | 430 |
| 45 | 1320 | 2200 | 440 |

p(i,j) = Odpovídající pravděpodobnost
j.. Číslo výrobku {1;2;3}
i.. Číslo scénáře {1;2;…;201}

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 2 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 3 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 4 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 5 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 6 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 7 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 8 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 9 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 10 | 0,00079012 | 0,00009558 | 0,00037253 |
| 11 | 0,00064198 | 0,00019116 | 0,00018626 |
| 12 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 13 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 14 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 15 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 16 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 17 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 18 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 19 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 20 | 0,00049383 | 0,00028674 | 0 |
| 21 | 0,0011358 | 0,00124253 | 0,00041909 |
| 22 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 23 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 24 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 25 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 26 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 27 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 28 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 29 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 30 | 0,00177778 | 0,00219833 | 0,00083818 |
| 31 | 0,00212346 | 0,00162485 | 0,00083818 |
| 32 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 33 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 34 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 35 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 36 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 37 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 38 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 39 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 40 | 0,00246914 | 0,00105137 | 0,00083818 |
| 41 | 0,00390123 | 0,00133811 | 0,00130384 |
| 42 | 0,00533333 | 0,00162485 | 0,0017695 |
| 43 | 0,00533333 | 0,00162485 | 0,0017695 |
| 44 | 0,00533333 | 0,00162485 | 0,0017695 |
| 45 | 0,00533333 | 0,00162485 | 0,0017695 |

# Seznam příloh na CD

Soubory jsou rozděleny do dvou adresářů.

1) **Matlab** - kódy k výpočtu jednotlivých rozdělení

   - **NVdiskretni.m**
   - **NVnormalni.m**
   - **NVrovnom.m**
   - **NVrovnomcast.m**

2) **GAMS**

   - **hodnoty.xlsx** - vstupní data zdiskretizovaných histogramů
   - **Továrna.gms** - zdrojový kód pro řešení projektu